

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/275630243>

# Tension of a Semi-infinite Plate Containing a Row of Elliptical and Circular-Arc Notches.

**Article** in *Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, A Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A* · October 1996

DOI: 10.1299/kikaia.62.2276

---

CITATIONS

2

---

READS

62

4 authors, including:



[Nao-Aki Noda](#)

Kyushu Institute of Technology

695 PUBLICATIONS 3,769 CITATIONS

SEE PROFILE

## 任意個の半だ円および円弧形切欠きを持つ半無限板の引張り\*

松 尾 忠 利<sup>\*1</sup>, 野 田 尚 昭<sup>\*2</sup>  
村 上 敬 宜<sup>\*3</sup>, 原 田 昭 治<sup>\*2</sup>Tension of a Semi-infinite Plate Containing a Row  
of Elliptical and Circular-Arc NotchesTadatoshi MATSUO, Nao-Aki NODA,  
Yukitaka MURAKAMI and Shoji HARADA

This paper deals with a row of equally spaced equal elliptical and circular-arc notches in a semi-infinite plate subjected to tension. Based on the concepts of the body force method, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularity, where the densities of body forces distributed in the  $x$ - and  $y$ -directions of semi-infinite plate are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the notches, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. In the analysis, the shape and position of notches are varied systematically; then, the magnitude and position of the maximum stress are examined. For any fixed shape and size of notches, the maximum stress is shown to be linear with the reciprocal of the number of notches.

**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Elliptical Arc Notch, Interaction Effect

## 1. 緒 言

二次元弾性体の応力集中問題について種々の理論解析や数値解析によって、数多くの有用な結果が得られているが、解析の困難性から未解決のまま残されているものが少なくない。例えば、一列に並ぶだ円孔を持つ無限板の引張問題について、周期だ円孔群の場合、中央の孔の応力を与える解析はこれまでに多くなされている<sup>(1)</sup>が、任意個数のだ円孔の最大応力についての解析は最近石田らが行っている<sup>(2)</sup>にすぎない。同様に一列に並ぶ半だ円切欠きを持つ半無限板の引張問題についても、無限個の切欠きの応力集中の解析は西谷が行っている<sup>(3)</sup>が、任意個数の切欠きの最大応力を与える解析はなされていない。一列に並ぶ切欠きの応力集中問題では、その干渉効果により切欠きが単独に存在する場合よりも応力集中は緩和されるが、最大応力は両端の切欠きに生じ、その発生位置は切欠底より外側にずれた点に生じる。したがって正確な解析には切欠

縁に沿った応力分布を把握する必要がある。また、ねじの破壊はナットの締付け面やめねじにかんでいる最初の山の部分で最大応力が生じることによって起こることから、切欠きの最大応力を調べることはねじの破壊を考える上でも参考になるものと思われる。

本論文では、体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法<sup>(4)(5)</sup>を用いて、任意個の半だ円および円弧形切欠きを有する半無限板の引張問題を解析する [図 1(a), (b)]。そして、切欠きの形状と距離および個数を変化させて応力集中の干渉効果を系統的に調べる。さらに切欠きの個数と最大応力の間の漸近特性より無限個の場合の応力集中係数を求める。また、表面粗さの疲労強度への影響を考える上で参考となる浅い円弧形切欠きの応力集中の正確な結果を得ることも目的とする。

2. 半無限板中の半だ円形切欠きの  
数値解析法

図 1(a)に半だ円切欠き列、図 1(b)に円弧形切欠き列を示す。図 1において、 $a, b$  は、それぞれ半だ円切欠きの短軸、長軸の長さである。 $2d$  は切欠き間の距離、 $\rho$  は曲率半径である。 $2c, t$  はそれぞれ円弧形切欠きの幅、深さである。ここでは、遠方で一様な  $x$  方向の引張応

\* 1995 年 9 月 12 日 第 73 期全国大会において講演、原稿受付 1995 年 6 月 8 日。

<sup>\*1</sup> 正員、福島工業高等専門学校 (〒970 いわき市平上荒川字長尾 30)。

<sup>\*2</sup> 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

<sup>\*3</sup> 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

力  $\sigma_x^\infty$  が作用している半無限板の大きさの等しい  $N$  個 ( $N$  は偶数) の一列半だ円形切欠きの引張問題 [図 1(a)] を例にとって説明する。半だ円形切欠きの個数が奇数個の場合やだ円弧形切欠きの場合も同様にして解析できる。この問題は重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、問題の対称性から、半無限板中の 2 点  $[\xi_k = \pm\{d + 2d(k-1) + a \cos \phi_k\}, \eta_k = b \sin \phi_k]$  に集中力が働くときの任意の点  $[x_i = d + 2d(i-1) + a \cos \theta_i, y_i = b \sin \theta_i]$  の応力場の解を用いて解

くことができる<sup>(6)(7)</sup>。ここで添字  $i, k$  はそれぞれ注目点  $(x_i, y_i)$  がある切欠き、着力点  $(\xi_k, \eta_k)$  がある切欠きを示している。このとき問題は、切欠きとなるべき仮想境界上に分布させた  $x, y$  方向の境界に沿った長さ当たりの体積力密度  $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$  を未知関数とする特異積分方程式で表現される  $[\phi_k$  は着力点  $(\xi_k, \eta_k)$  を表す角度で注目点  $(x_i, y_i)$  を表す角度  $\theta_i$  と区別して用いる]。

$$\begin{aligned} & (-1/2)\{\rho_x^*(\theta_i)\cos \theta_{i0} + \rho_y^*(\theta_i)\sin \theta_{i0}\} + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^\pi K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\ & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^\pi K_{nn}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds = -\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_{i0} \\ & (-1/2)\{-\rho_x^*(\theta_i)\sin \theta_{i0} + \rho_y^*(\theta_i)\cos \theta_{i0}\} + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^\pi K_{nt}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\ & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^\pi K_{nt}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds = \sigma_x^\infty \sin \theta_{i0} \cos \theta_{i0} \\ & i=1 \sim N/2 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、

$$-d\xi = a \sin \phi_k d\phi_k, d\eta = b \cos \phi_k d\phi_k, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi_k + b^2 \cos^2 \phi_k} d\phi_k \dots\dots\dots (2)$$

である。また、 $\theta_{i0}$  は点  $(x, y)$  における切欠きの外向き法線と  $x$  軸のなす角度である。 $\sum_{k=1}^{N/2}$  は  $N$  個の切欠きとなるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する。

半だ円切欠きとなる仮想境界上に生じる法線方向の垂直応力を  $\sigma_n$ 、せん断応力を  $\tau_{nt}$  とすると、式(1)は仮想境界上における、 $i$  番めの切欠縁の境界条件  $\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$  に相当している。式(1)の第 1 項は、体積力を  $\odot$  境界(境界内部の点で、境界に無限に近い点からなる境界<sup>(7)</sup>)に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$  を例にとると、これは仮想境界上の  $y$  軸に対称な 2 点に  $x$  方向の単位大きさの集中力が  $y$  軸に対称に作用するとき境界上の点に生じる法線方向の応力  $\sigma_n$  を意味する。式(1)の第 2, 第 3 項は  $i=k$  のとき、 $1/\sin\{(\theta_i - \phi_k)/2\}$  の特異性を有する項を含んでいる。そのため、 $\theta_i = \phi_k (i=k)$  の場合には、積分のコーシーの主値をとるものとする。

特異積分方程式 [式(1)] の未知関数である  $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$  を次のように表す。

$$\rho_x^*(\phi_k) = \frac{dF_\xi}{ds} = \frac{dF_\xi}{d\eta} n_x(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k) = \frac{dF_\eta}{ds} = -\frac{dF_\eta}{d\xi} n_y(\phi_k) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $dF_\xi, dF_\eta$  は微小要素  $ds$  に作用する体積力の合力の  $\xi, \eta$  方向成分である。また、 $n_x(\phi_k), n_y(\phi_k)$  は仮想境界上の点  $(x_k, y_k)$  における単位外向き法線ベクトルの座標成分である。

前報<sup>(5)</sup> で式(4)に示すような  $x, y$  方向について 4 種類ずつ計 8 種類の基本密度関数を定義した。

$$\begin{cases} w_{x1}(\phi_k) = n_x(\phi_k)/\cos \phi_k & \begin{cases} w_{y1}(\phi_k) = n_y(\phi_k)/\sin \phi_k \\ w_{y2}(\phi_k) = n_y(\phi_k) \end{cases} \\ w_{x2}(\phi_k) = n_x(\phi_k)\tan \phi_k & \\ w_{x3}(\phi_k) = n_x(\phi_k) & \begin{cases} w_{y3}(\phi_k) = n_y(\phi_k)\cot \phi_k \\ w_{y4}(\phi_k) = n_y(\phi_k)\cos \phi_k \end{cases} \\ w_{x4}(\phi_k) = n_x(\phi_k)\sin \phi_k & \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

この問題では、基本密度関数として  $w_{x1}(\phi_k), w_{x3}(\phi_k), w_{y2}(\phi_k), w_{y4}(\phi_k)$  を採用すれば\*\*1 式(3)の未知関数は次式で表現される。

$$\rho_x^*(\phi_k) = \rho_{x1}(\phi_k)w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x3}(\phi_k)w_{x3}(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k) = \rho_{y2}(\phi_k)w_{y2}(\phi_k) + \rho_{y4}(\phi_k)w_{y4}(\phi_k) \dots\dots\dots (5)$$

本研究では未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

\*\*1 この問題では、 $\phi_k = \pi/2$  について対称性および逆対称性を考慮した関数を選ぶ必要がある。次に  $\phi_k = 0$  において  $\rho_x^*(\phi_k) \neq 0, \rho_y^*(\phi_k) = 0$  となることから、4 種類の基本密度関数が選ばれる。

$$\rho_{x1}(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(\phi_k), \rho_{x3}(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(\phi_k), \rho_{y2}(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(\phi_k), \rho_{y4}(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(\phi_k) \dots \dots \dots (6)$$

$$t_n(\phi_k) = (\pi/2 - \phi_k)^{2(n-1)} \dots \dots \dots (7)$$

ここで  $M$  は  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により、式(1)の積分方程式は係数  $a_n, b_n, c_n, d_n$  についての  $2M \times N/2$  元の連立方程式に還元される。

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + d_n D_n) = -\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_{i0}$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n E_n + b_n F_n + c_n G_n + d_n H_n) = \sigma_x^\infty \sin \theta_{i0} \cos \theta_{i0}$$

..... (8)

ここで、

$$A_n = (-1/2) t_n(\theta_i) \cos^2 \theta_{i0} / \cos \theta_i + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^\pi K_{nn}^{F_x}(\phi_k, \theta_i) t_n(\phi_k) b d\phi_k \dots \dots \dots (9)$$

$B_n \sim H_n$  の影響係数も式(9)と同様な形で表現できる。

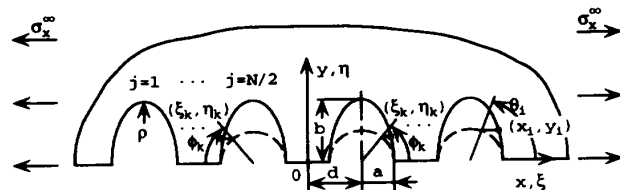
任意の点の応力は係数  $a_n, b_n, c_n, d_n$  と影響係数  $A_n \sim H_n$  の一次結合で表される。

以上の解析方法により半無限板の半だ円切欠列の応力集中係数ならびに境界上の応力分布を求める。

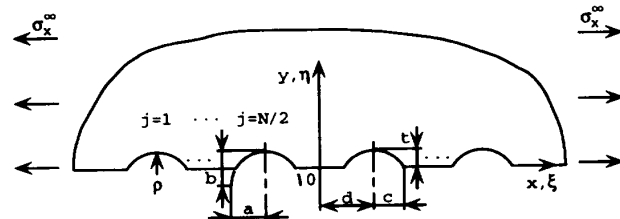
### 3. 解析結果および考察

**3.1 半無限板の半だ円切欠きの干渉問題の解析結果** 図1(a)の半無限板中の任意個の一系列半だ円切欠きの干渉問題において、切欠きの個数  $N=5, 6$  の場合について形状比が  $a/b=1, a/d=0.6, \sigma_x^\infty=1$  の場合の最大応力が生じる切欠き(最も外側の切欠き)の境界縁に沿った応力  $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$  の収束状況を表1に示す。

ここで  $\sigma_n$  は、境界上の法線方向の垂直応力、 $\sigma_t$  は、接線方向の垂直応力、 $\tau_{nt}$  はせん断応力を表す。また、表中の  $\theta(\text{deg.})$  は、自由線からの角度である(図1(a))。本解析結果は、 $M=20$  程度で有効数字4けた程度まで



(a) A row of semi-elliptical notches



(b) A row of circular arc notches  
( $a=b=p, c=\sqrt{2tp-t^2}$ )

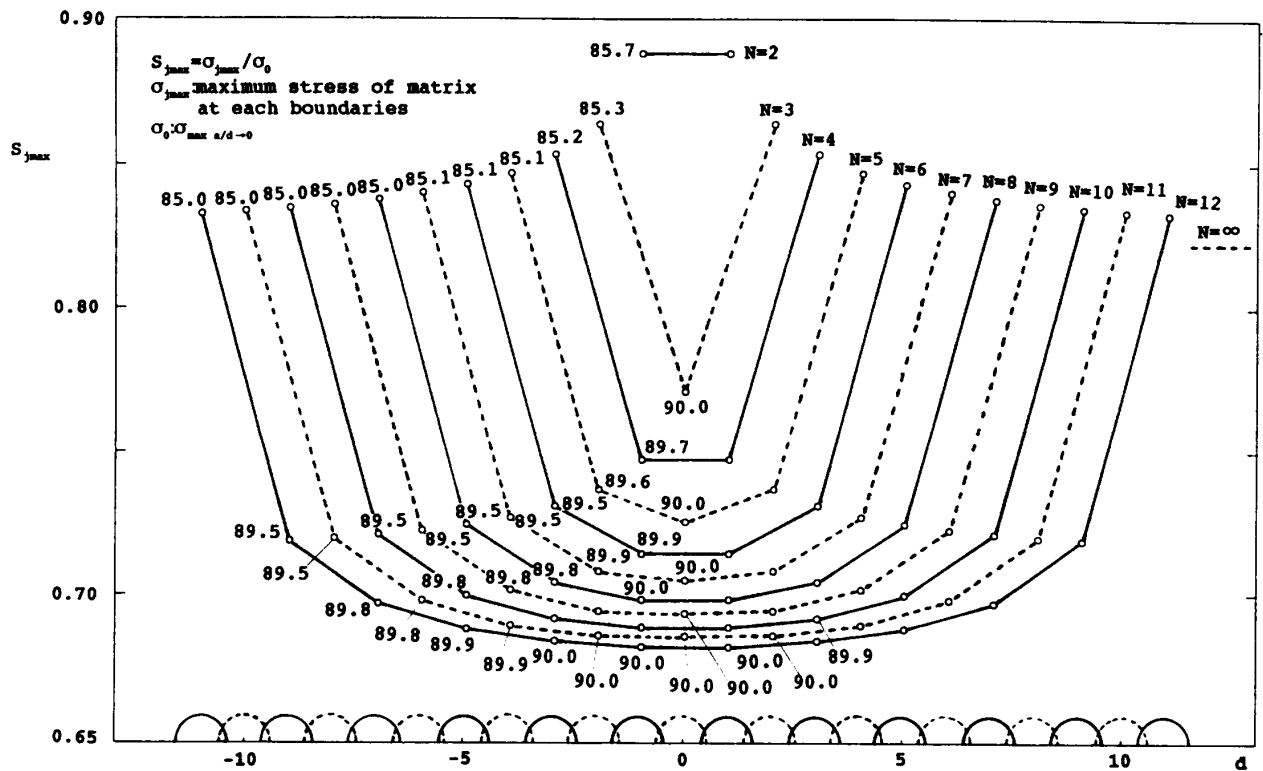
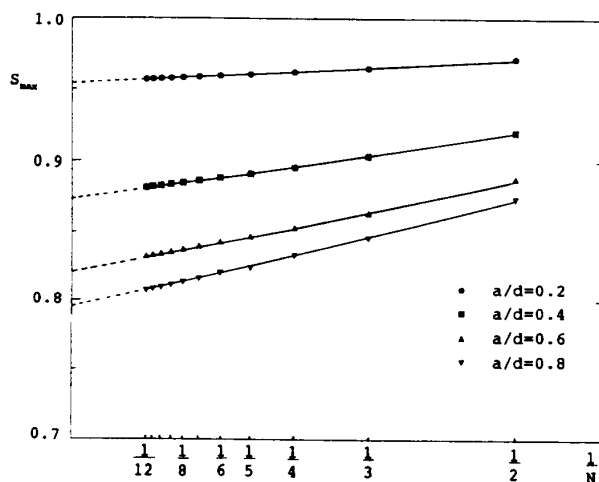
Fig. 1 Problems

で収束して良好な収束性を示している。また、境界上で零であるべき  $\sigma_n, \tau_{nt}$  の値は境界全周で  $M=20$  程度でも  $10^{-6}$  程度であり高い境界条件の満足度が確かめられた。

図2は切欠きの個数  $N=2 \sim 12$  に対し、 $a/b=1, a/d=0.6, \sigma_x^\infty=1$  のときの最大応力の値と発生位置を示した図である。ここで、縦軸は個々の切欠境界での最大応力  $\sigma_{j \max}$  を半無限板中の一つの半円切欠きの応力集中係数  $\sigma_0 (=3.0653)$  で無次元化した  $S_{j \max} = \sigma_{j \max} / \sigma_0$  をとっている。また、図2中の実線と破線は、各切欠きの最大応力の発生位置を結んだものであり、図中の数字は、最大応力の発生位置を示している。図2の結果

Table 1 Stress distribution along the most outer notch boundary

| N   | θ(deg.) | M  | 5              |                       |                       | 6              |                       |                       |
|-----|---------|----|----------------|-----------------------|-----------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|
|     |         |    | σ <sub>t</sub> | σ <sub>n</sub>        | τ <sub>nt</sub>       | σ <sub>t</sub> | σ <sub>n</sub>        | τ <sub>nt</sub>       |
| 40  | 4       | 8  | 0.8796         | -1.5×10 <sup>-2</sup> | -1.1×10 <sup>-2</sup> | 0.8779         | -1.5×10 <sup>-2</sup> | -1.1×10 <sup>-2</sup> |
|     | 8       | 12 | 0.8945         | 6.2×10 <sup>-4</sup>  | 5.3×10 <sup>-4</sup>  | 0.8920         | 6.2×10 <sup>-4</sup>  | 5.2×10 <sup>-4</sup>  |
|     | 12      | 16 | 0.9004         | -1.8×10 <sup>-5</sup> | -5.3×10 <sup>-6</sup> | 0.8977         | -1.7×10 <sup>-5</sup> | -4.8×10 <sup>-6</sup> |
|     | 16      | 20 | 0.9022         | -3.6×10 <sup>-6</sup> | -1.7×10 <sup>-7</sup> | 0.8995         | 9.8×10 <sup>-8</sup>  | -1.6×10 <sup>-7</sup> |
|     | 20      | 24 | 0.9028         | -1.4×10 <sup>-7</sup> | -5.7×10 <sup>-8</sup> | 0.9001         | -1.3×10 <sup>-8</sup> | -3.7×10 <sup>-8</sup> |
|     | 24      |    | 0.9030         | -1.1×10 <sup>-7</sup> | -6.1×10 <sup>-9</sup> | 0.9003         | 4.6×10 <sup>-9</sup>  | 1.4×10 <sup>-9</sup>  |
| 60  | 4       | 8  | 1.9278         | -7.2×10 <sup>-2</sup> | -1.9×10 <sup>-2</sup> | 1.9212         | -7.1×10 <sup>-2</sup> | -1.9×10 <sup>-2</sup> |
|     | 8       | 12 | 1.9477         | -1.8×10 <sup>-4</sup> | -1.3×10 <sup>-4</sup> | 1.9406         | -1.8×10 <sup>-4</sup> | -1.3×10 <sup>-4</sup> |
|     | 12      | 16 | 1.9514         | 9.2×10 <sup>-6</sup>  | 1.5×10 <sup>-6</sup>  | 1.9441         | 9.3×10 <sup>-6</sup>  | 1.1×10 <sup>-6</sup>  |
|     | 16      | 20 | 1.9526         | -2.3×10 <sup>-7</sup> | 2.0×10 <sup>-7</sup>  | 1.9452         | -1.1×10 <sup>-7</sup> | 7.6×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 20      | 24 | 1.9530         | -1.9×10 <sup>-8</sup> | 1.2×10 <sup>-8</sup>  | 1.9456         | 6.2×10 <sup>-9</sup>  | 1.1×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 24      |    | 1.9532         | -1.6×10 <sup>-8</sup> | 9.3×10 <sup>-9</sup>  | 1.9458         | 1.3×10 <sup>-9</sup>  | -2.8×10 <sup>-9</sup> |
| 80  | 4       | 8  | 2.5714         | 1.0×10 <sup>-2</sup>  | -1.2×10 <sup>-2</sup> | 2.5605         | 1.0×10 <sup>-2</sup>  | -1.1×10 <sup>-2</sup> |
|     | 8       | 12 | 2.5639         | 4.0×10 <sup>-5</sup>  | 2.1×10 <sup>-5</sup>  | 2.5529         | 4.0×10 <sup>-5</sup>  | 2.1×10 <sup>-5</sup>  |
|     | 12      | 16 | 2.5669         | 2.4×10 <sup>-6</sup>  | 4.6×10 <sup>-7</sup>  | 2.5557         | -2.3×10 <sup>-6</sup> | 1.9×10 <sup>-7</sup>  |
|     | 16      | 20 | 2.5677         | -1.0×10 <sup>-7</sup> | 3.7×10 <sup>-7</sup>  | 2.5564         | 1.1×10 <sup>-7</sup>  | 5.4×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 20      | 24 | 2.5680         | -9.6×10 <sup>-9</sup> | 2.8×10 <sup>-9</sup>  | 2.5567         | 4.2×10 <sup>-9</sup>  | 5.6×10 <sup>-9</sup>  |
|     | 24      |    | 2.5681         | -8.5×10 <sup>-9</sup> | 2.3×10 <sup>-9</sup>  | 2.5568         | 3.3×10 <sup>-10</sup> | 1.4×10 <sup>-9</sup>  |
| 90  | 4       | 8  | 2.5764         | 1.3×10 <sup>-2</sup>  | -3.7×10 <sup>-2</sup> | 2.5646         | 1.3×10 <sup>-2</sup>  | -3.7×10 <sup>-2</sup> |
|     | 8       | 12 | 2.5683         | 2.1×10 <sup>-4</sup>  | 9.4×10 <sup>-5</sup>  | 2.5564         | 2.1×10 <sup>-4</sup>  | 9.4×10 <sup>-5</sup>  |
|     | 12      | 16 | 2.5703         | 3.9×10 <sup>-6</sup>  | -1.1×10 <sup>-6</sup> | 2.5582         | 3.9×10 <sup>-6</sup>  | -7.4×10 <sup>-7</sup> |
|     | 16      | 20 | 2.5709         | -1.7×10 <sup>-7</sup> | -9.8×10 <sup>-8</sup> | 2.5588         | -1.7×10 <sup>-7</sup> | -4.6×10 <sup>-8</sup> |
|     | 20      | 24 | 2.5711         | -3.9×10 <sup>-8</sup> | 2.3×10 <sup>-8</sup>  | 2.5590         | -3.8×10 <sup>-8</sup> | 4.8×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 24      |    | 2.5712         | -6.3×10 <sup>-9</sup> | 5.3×10 <sup>-9</sup>  | 2.5591         | -5.7×10 <sup>-9</sup> | -2.2×10 <sup>-9</sup> |
| 100 | 4       | 8  | 2.3463         | 9.3×10 <sup>-3</sup>  | -4.5×10 <sup>-3</sup> | 2.3347         | 9.2×10 <sup>-3</sup>  | -4.4×10 <sup>-3</sup> |
|     | 8       | 12 | 2.3489         | 3.5×10 <sup>-5</sup>  | 1.1×10 <sup>-5</sup>  | 2.3372         | 3.5×10 <sup>-5</sup>  | 1.3×10 <sup>-5</sup>  |
|     | 12      | 16 | 2.3503         | -2.0×10 <sup>-6</sup> | 1.5×10 <sup>-6</sup>  | 2.3386         | -1.8×10 <sup>-6</sup> | 5.6×10 <sup>-7</sup>  |
|     | 16      | 20 | 2.3508         | 6.3×10 <sup>-7</sup>  | -1.1×10 <sup>-7</sup> | 2.3390         | 2.2×10 <sup>-7</sup>  | 4.3×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 20      | 24 | 2.3510         | 1.5×10 <sup>-8</sup>  | 3.4×10 <sup>-8</sup>  | 2.3391         | 4.0×10 <sup>-8</sup>  | 4.9×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 24      |    | 2.3510         | 2.0×10 <sup>-8</sup>  | 5.4×10 <sup>-9</sup>  | 2.3392         | 4.5×10 <sup>-9</sup>  | 8.8×10 <sup>-9</sup>  |
| 120 | 4       | 8  | 1.3714         | -5.6×10 <sup>-2</sup> | -4.9×10 <sup>-2</sup> | 1.3634         | -5.6×10 <sup>-2</sup> | -4.9×10 <sup>-2</sup> |
|     | 8       | 12 | 1.3990         | -1.2×10 <sup>-4</sup> | -2.0×10 <sup>-4</sup> | 1.3909         | -1.2×10 <sup>-4</sup> | -1.9×10 <sup>-4</sup> |
|     | 12      | 16 | 1.3997         | 5.4×10 <sup>-6</sup>  | -2.0×10 <sup>-6</sup> | 1.3916         | 5.1×10 <sup>-6</sup>  | -2.4×10 <sup>-6</sup> |
|     | 16      | 20 | 1.3999         | 3.7×10 <sup>-7</sup>  | 2.3×10 <sup>-7</sup>  | 1.3918         | 3.9×10 <sup>-7</sup>  | 4.4×10 <sup>-8</sup>  |
|     | 20      | 24 | 1.3999         | 2.8×10 <sup>-8</sup>  | 1.6×10 <sup>-8</sup>  | 1.3918         | 1.7×10 <sup>-8</sup>  | 5.1×10 <sup>-9</sup>  |
|     | 24      |    | 1.3999         | 2.6×10 <sup>-8</sup>  | 1.3×10 <sup>-8</sup>  | 1.3917         | 3.6×10 <sup>-9</sup>  | -1.8×10 <sup>-9</sup> |
| 140 | 4       | 8  | 0.3214         | -1.2×10 <sup>-2</sup> | 1.2×10 <sup>-2</sup>  | 0.3183         | -1.2×10 <sup>-2</sup> | 1.2×10 <sup>-2</sup>  |
|     | 8       | 12 | 0.3363         | 2.8×10 <sup>-4</sup>  | -5.5×10 <sup>-5</sup> | 0.3335         | 2.8×10 <sup>-4</sup>  | -5.8×10 <sup>-5</sup> |
|     | 12      | 16 | 0.3354         | -7.0×10 <sup>-6</sup> | 2.8×10 <sup>-6</sup>  | 0.3326         | -7.4×10 <sup>-6</sup> | 3.2×10 <sup>-6</sup>  |
|     | 16      | 20 | 0.3354         | 1.9×10 <sup>-7</sup>  | -1.1×10 <sup>-7</sup> | 0.3326         | -1.2×10 <sup>-7</sup> | -7.4×10 <sup>-8</sup> |
|     | 20      | 24 | 0.3352         | 2.6×10 <sup>-8</sup>  | -6.2×10 <sup>-9</sup> | 0.3324         | -4.1×10 <sup>-9</sup> | -1.7×10 <sup>-9</sup> |
|     | 24      |    | 0.3351         | 2.2×10 <sup>-8</sup>  | -3.2×10 <sup>-9</sup> | 0.3323         | -3.0×10 <sup>-9</sup> | 7.5×10 <sup>-9</sup>  |

Fig. 2 Variation of  $S_{j\max}$  of semi-infinite plate containing a row of semi-circular notchesFig. 3 Relationship between  $S_{\max}$  and  $1/N$ 

とさきに報告した円孔列の結果<sup>(2)(8)</sup>を比較すると両者の  $S_{j\max}$  の値は、半円切欠きのほうが1%程度大きくなるがほとんど差が生じていない。また、 $S_{j\max}$  は最も外側の切欠きで大きく、2 番め以後の切欠きではかなり小さくなる。 $N=11$  と  $N=12$  の結果より外挿して得られた  $N=\infty$  のときの最も外側の切欠きに生じる最大応力は  $\sigma_0$  よりも18%程度小さくなっている。

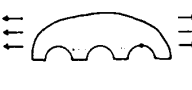
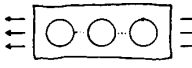
図3は  $a/b=1$ ,  $\sigma_x^\infty=1$  のとき  $a/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  と変化させたときの最大応力 ( $S_{j\max}$  の最大値  $S_{\max}$ , ここでは最も外側の切欠きに生じる) と切欠きの個数  $N$  の関係を示した図である。石田らはだ円孔列を有する

Table 2 Relationship between  $S_{\max}$  and  $a/d$ 

| $N$              | $a/d$ | 0.80    | 0.83    | 0.87    | 1.0<br>(0.87<br>-0.83) | 1.0<br>(0.83<br>-0.80) |
|------------------|-------|---------|---------|---------|------------------------|------------------------|
| 3                |       | 0.73784 | 0.73481 | 0.73233 | 0.7249                 | 0.7228                 |
| 5                |       | 0.68362 | 0.67941 | 0.67559 | 0.6641                 | 0.6625                 |
| 7                |       | 0.65932 | 0.65449 | 0.65002 | 0.6366                 | 0.6352                 |
| 9                |       | 0.64539 | 0.64017 | 0.63534 | 0.6209                 | 0.6194                 |
| 11               |       | 0.63632 | 0.63084 | 0.62575 | 0.6105                 | 0.6090                 |
| 13               |       | 0.62989 | 0.62434 | 0.61932 | 0.6043                 | 0.6022                 |
| $\infty$ (9-11)  |       | 0.5955  | 0.5889  | 0.5826  | 0.564                  | 0.562                  |
| $\infty$ (11-13) |       | 0.5945  | 0.5886  | 0.5840  | 0.570                  | 0.565                  |

板の引張りにおいて、 $\sigma_x^\infty=1$ ,  $\sigma_y^\infty=0$  のとき  $S_{\max}$  と  $1/N$  はほぼ直線関係となることを解析結果として示し、これを自平衡物体力の拡散特性から説明している<sup>(2)</sup>。本解析結果により半円切欠列の場合にも  $S_{\max}$  と  $1/N$  間の直線関係がほぼ成り立つことがわかる。さらに、最大応力と  $a/d$  間の関係を考察する。表2に  $a/d$  を変化させたとき中央の切欠きに生じる最大応力の値を示す。表2中の  $\infty$  (9-11) 等の値は  $N=9$  と  $N=11$  の解析結果から、外挿によって求めた、 $N=\infty$  のときの最大応力の値である。また、(0.87-0.83) 等の値は、 $a/d=0.87$  と  $a/d=0.83$  の解析結果から外挿によって求めた、 $a/d=1.0$  の場合の最大応力の値である。(0.87-0.83) と (0.83-0.80) は誤差1%以内で一致している。また、図4は、 $a/d$  を変化させたときの最大応力の値をプロットしたものである。図4より  $S_{\max}$  と  $a/d$  間の直線関係が  $a/d > 0.8$  の範囲でほぼ成り立つことが

Table 3 Maximum stress at the outermost notch in a semi-infinite plate containing a row of semi-circular notches ( $a=b$ ) shown in Fig. 1(a) in comparison with a row of circular holes [ $N$ : number of notch,  $S_{\max}=\max(S_j)$ ,  $j$ : at the outermost notch,  $S_{j\max}=\sigma_{j\max}/\sigma_0$ ,  $\sigma_0$ :  $\sigma_{\max}$  of single semi-circular notch]

|                                                                                                       | $a/d$    | 0.0    |            | 0.0    |            | 0.2    |            | 0.4    |            | 0.6    |            | 0.8    |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|
|                                                                                                       | $N$      | (deg.) | $\sigma_0$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ |
| <br>Present analysis | 2        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9718     | 87.6   | 0.9203     | 85.7   | 0.8885     | 84.5   | 0.8740     |
|                                                                                                       | 3        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9652     | 87.4   | 0.9032     | 85.3   | 0.8642     | 84.0   | 0.8427     |
|                                                                                                       | 4        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9623     | 87.3   | 0.8956     | 85.2   | 0.8536     | 83.8   | 0.8332     |
|                                                                                                       | 5        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9606     | 87.3   | 0.8912     | 85.1   | 0.8470     | 83.7   | 0.8242     |
|                                                                                                       | 6        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9596     | 87.2   | 0.8885     | 85.1   | 0.8431     | 83.7   | 0.8203     |
|                                                                                                       | 7        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9588     | 87.2   | 0.8864     | 85.1   | 0.8401     | 83.7   | 0.8161     |
|                                                                                                       | 8        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9583     | 87.2   | 0.8850     | 85.0   | 0.8379     | 83.7   | 0.8137     |
|                                                                                                       | 9        | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9578     | 87.2   | 0.8839     | 85.0   | 0.8360     | 83.7   | 0.8123     |
|                                                                                                       | 10       | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9576     | 87.2   | 0.8829     | 85.0   | 0.8348     | 83.6   | 0.8097     |
|                                                                                                       | 11       | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9573     | 87.2   | 0.8824     | 85.0   | 0.8337     | 83.6   | 0.8082     |
|                                                                                                       | 12       | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     | 89.5   | 0.9571     | 87.2   | 0.8817     | 85.0   | 0.8328     | 83.6   | 0.8071     |
|                                                                                                       | $\infty$ | 90.0   | 3.0653     | 90.0   | 1.0000     |        | 0.9549     |        | 0.8740     |        | 0.8229     |        | 0.7950     |
| <br>Ref. [2,8]       | 2        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.7   | 0.976      | 88.0   | 0.926      | 85.9   | 0.890      | 84.2   | 0.874      |
|                                                                                                       | 3        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.970      | 87.7   | 0.911      | 85.6   | 0.869      | 84.2   | 0.849      |
|                                                                                                       | 4        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.967      | 87.7   | 0.904      | 85.4   | 0.859      | 84.1   | 0.837      |
|                                                                                                       | 5        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.966      | 87.7   | 0.900      | 85.4   | 0.853      | 84.0   | 0.830      |
|                                                                                                       | 6        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.965      | 87.7   | 0.897      | 85.4   | 0.850      | 84.0   | 0.826      |
|                                                                                                       | 7        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.964      | 87.7   | 0.896      | 85.4   | 0.847      | 83.9   | 0.822      |
|                                                                                                       | 8        | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      | 89.6   | 0.964      | 87.7   | 0.893      | 85.4   | 0.844      | 83.9   | 0.819      |
|                                                                                                       | $\infty$ | 90.0   | 3.000      | 90.0   | 1.000      |        | 0.961      |        | 0.886      |        | 0.832      |        | 0.806      |

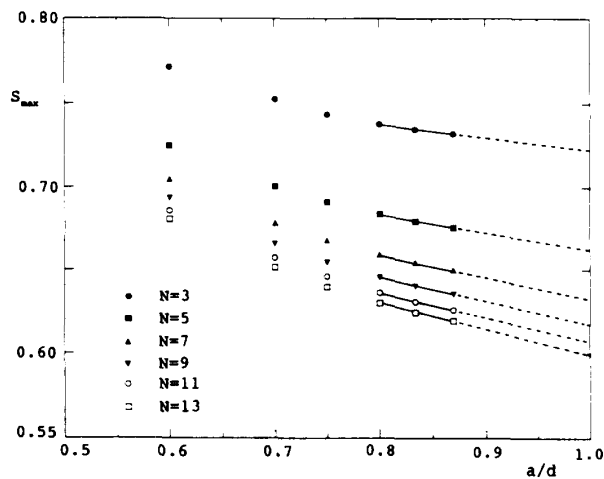


Fig. 4 Relationship between  $S_{\max}$  and  $a/d$

わかる。各切欠きが接する  $a/d=1$  の場合には、体積力密度を精度よく決定することが実際の数値解析上困難となる。しかしこの直線性を利用すれば、 $a/d=1$  の場合を外挿によって求めることが可能であり、その値も表2に示している。

表3は  $a/b=1$ ,  $\sigma_0=1$  のとき、切欠きの距離  $a/d$  を系統的に変化させたときの  $S_{\max}$  の数値をまとめたものであり、表中の角度(deg.)は最大応力の生じる位置を示している。表3中の  $N \rightarrow \infty$  のときの  $S_{\max}$  は切欠きの個数  $N=11, 12$  のときの解析結果から外挿によって求めた。また、無限板と半無限板の応力集中の干渉効果を比較するために、無限板中の円孔列の解析結果も示した。著者らと石田らの円孔列の結果は、表3に示した範囲で完全に一致している。

半無限板のだ円形切欠列の干渉問題において、形状比  $(a/b)^2 = \rho/b$  ( $\rho$  は切欠長軸端の曲率半径)、切欠間の距離  $b/d$  を系統的に変化させたときの最大応力  $S_{\max}$  の値を表4に示す。また、表中の角度(deg.)は最大応力の生じる位置を示している。ここでは  $N \rightarrow \infty$  の  $S_{\max}$  を  $N=12, 13$  の解析結果からの外挿によって求めた。

**3.2 中央の切欠きの最大応力の検討** ここでは、参考のために、石田らによる無限板中のだ円孔列の中央のだ円孔に生じる最大応力の解析結果と西谷の半無限板の半だ円切欠き列の中央の切欠きに生じる最大応力の解析結果<sup>(3)</sup>を本解析結果とともに表5に示す。西谷の解析結果は  $b/d$  が小さい範囲で本解析結果とよく一致している。

著者らの一人は材料の表面粗さの疲労強度への影響の定量的評価に関する研究を行っている<sup>(9)</sup>。表6のデータは表面粗さの影響を応力集中係数で評価する立場において参考となるものと思われる<sup>\*\*2</sup>。円弧形切欠列の場合にも半だ円切欠列と同様な最大応力と個数、最大応力と距離の間には直線性が確認された。したがって、外挿により  $N \rightarrow \infty$ ,  $p=2c$  である連続円弧形切欠きの応力集中係数を表6にまとめた。

<sup>\*\*2</sup> 疲労強度へ及ぼす表面粗さの幾何学的影響を明らかにするためには、粗さを模擬した極めて浅い周期的切欠きを有する試験片の疲労強度を調べることが必要となる<sup>(9)</sup>。そのような切欠きの応力集中係数は、これまでの研究では、与えられていないようである。なお、実際の疲労強度は、微小き裂の発生だけでなく停留が問題となることから、周期緑き裂の応力拡大係数も同様に重要となる<sup>(10)</sup>。

Table 4 Maximum stress at the outer most notch in a semi-infinite plate containing a row of semi-elliptical notches shown in Fig. 1(a) [ $N$ : number of notch,  $S_{\max} = \max(S_j)_{\max}$ ,  $j$ : at the outer most notch,  $S_j = \sigma_j / \sigma_0$ ,  $\sigma_0$ :  $\sigma_{\max}$  of single semi-circular notch]

| $\rho/b$ | $b/d$    | 0.0    |            | 0.0    |            | 0.2    |            | 0.4    |            | 0.6    |            | 0.8    |            |
|----------|----------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|
|          | $N$      | (deg.) | $\sigma_0$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ | (deg.) | $S_{\max}$ |
| 0.2      | 10       | 90.0   | 5.7353     | 90.0   | 1.0000     | 89.9   | 0.9626     | 89.4   | 0.8894     | 88.6   | 0.8301     | 88.0   | 0.7930     |
|          | 11       | 90.0   | 5.7353     | 90.0   | 1.0000     | 89.9   | 0.9624     | 89.4   | 0.8887     | 88.6   | 0.8290     | 88.0   | 0.7916     |
|          | 12       | 90.0   | 5.7353     | 90.0   | 1.0000     | 89.9   | 0.9622     | 89.4   | 0.8882     | 88.6   | 0.8281     | 88.0   | 0.7905     |
|          | 13       | 90.0   | 5.7353     | 90.0   | 1.0000     | 89.9   | 0.9620     | 89.4   | 0.8877     | 88.6   | 0.8274     | 88.0   | 0.7895     |
|          | $\infty$ | 90.0   | 5.7353     | 90.0   | 1.0000     |        | 0.9596     |        | 0.8817     |        | 0.8190     |        | 0.7775     |
| 0.4      | 10       | 90.0   | 4.3120     | 90.0   | 1.0000     | 89.8   | 0.9609     | 88.8   | 0.8870     | 87.6   | 0.8311     | 86.7   | 0.7980     |
|          | 11       | 90.0   | 4.3120     | 90.0   | 1.0000     | 89.8   | 0.9607     | 88.8   | 0.8863     | 87.6   | 0.8300     | 86.7   | 0.7966     |
|          | 12       | 90.0   | 4.3120     | 90.0   | 1.0000     | 89.8   | 0.9605     | 88.8   | 0.8858     | 87.6   | 0.8291     | 86.7   | 0.7955     |
|          | 13       | 90.0   | 4.3120     | 90.0   | 1.0000     | 89.8   | 0.9603     | 88.8   | 0.8853     | 87.6   | 0.8284     | 86.7   | 0.7945     |
|          | $\infty$ | 90.0   | 4.3120     | 90.0   | 1.0000     |        | 0.9579     |        | 0.8793     |        | 0.8200     |        | 0.7825     |
| 0.6      | 10       | 90.0   | 3.6867     | 90.0   | 1.0000     | 89.7   | 0.9597     | 88.3   | 0.8854     | 86.7   | 0.8325     | 85.6   | 0.8024     |
|          | 11       | 90.0   | 3.6867     | 90.0   | 1.0000     | 89.7   | 0.9594     | 88.3   | 0.8847     | 86.7   | 0.8313     | 85.6   | 0.8009     |
|          | 12       | 90.0   | 3.6867     | 90.0   | 1.0000     | 89.7   | 0.9592     | 88.3   | 0.8841     | 86.7   | 0.8305     | 85.6   | 0.7998     |
|          | 13       | 90.0   | 3.6867     | 90.0   | 1.0000     | 89.7   | 0.9591     | 88.3   | 0.8836     | 86.7   | 0.8297     | 85.6   | 0.7987     |
|          | $\infty$ | 90.0   | 3.6867     | 90.0   | 1.0000     |        | 0.9571     |        | 0.8776     |        | 0.8201     |        | 0.7855     |
| 0.8      | 10       | 90.0   | 3.3166     | 90.0   | 1.0000     | 89.6   | 0.9586     | 87.8   | 0.8841     | 85.8   | 0.8339     | 84.6   | 0.8062     |
|          | 11       | 90.0   | 3.3166     | 90.0   | 1.0000     | 89.6   | 0.9583     | 87.8   | 0.8833     | 85.8   | 0.8327     | 84.6   | 0.8046     |
|          | 12       | 90.0   | 3.3166     | 90.0   | 1.0000     | 89.6   | 0.9580     | 87.8   | 0.8827     | 85.8   | 0.8318     | 84.6   | 0.8036     |
|          | 13       | 90.0   | 3.3166     | 90.0   | 1.0000     | 89.6   | 0.9579     | 87.8   | 0.8822     | 85.8   | 0.8310     | 84.6   | 0.8025     |
|          | $\infty$ | 90.0   | 3.3166     | 90.0   | 1.0000     |        | 0.9567     |        | 0.8762     |        | 0.8214     |        | 0.7893     |

Table 5 Maximum stress at the central notch in a semi-infinite plate containing a row of semi-elliptical notches shown in Fig. 1(a) [number of notch  $N = \infty$ ,  $S_{\max} = \max(S_j)_{\max}$ ,  $j$ : at the central notch,  $S_j = \sigma_j / \sigma_0$ ,  $\sigma_0$ :  $\sigma_{\max}$  of single semi-elliptical notch]

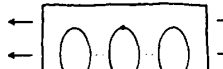
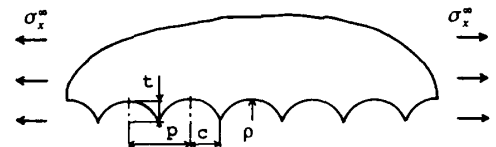
|                                                                                                                              | $\rho/b$<br>$= (a/b)^2$ | $b/a$      | $\sigma_0$        | $S_{j\max}$       |                   |                   |                   |                   |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--|
|                                                                                                                              |                         |            | $b/d=0.0$         | $b/d=0.0$         | $b/d=0.2$         | $b/d=0.4$         | $b/d=0.6$         | $b/d=0.8$         |  |
| present analysis<br>( ): Nisitani [3]<br> | 0.2                     | $\pm 2.24$ | 5.7353            | 1.0000            | 0.9214            | 0.7717            | 0.6535            | 0.5785            |  |
|                                                                                                                              | 0.25                    | 2.0        | 5.2202<br>(5.221) | 1.0000<br>(1.000) | 0.9205<br>(0.920) | 0.7707<br>(0.770) | 0.6533<br>(0.652) | 0.5798<br>(0.578) |  |
|                                                                                                                              | 0.4                     | $\pm 1.58$ | 4.3120            | 1.0000            | 0.9179            | 0.7666            | 0.6525            | 0.5831            |  |
|                                                                                                                              | 0.6                     | $\pm 1.29$ | 3.6867            | 1.0000            | 0.9152            | 0.7623            | 0.6521            | 0.5869            |  |
|                                                                                                                              | 0.8                     | $\pm 1.12$ | 3.3166            | 1.0000            | 0.9128            | 0.7586            | 0.6518            | 0.5903            |  |
| Isida [2]<br>                             | 1.0                     | 1.0        | 3.0653<br>(3.065) | 1.0000<br>(1.000) | 0.9106<br>(0.911) | 0.7560<br>(0.755) | 0.6529<br>(0.650) | 0.5948<br>(0.588) |  |
|                                                                                                                              | 0.2                     | $\pm 2.24$ | 5.4721            | 1.0000            | 0.939             | 0.810             | 0.691             | 0.608             |  |
|                                                                                                                              | 0.4                     | $\pm 1.58$ | 4.1623            | 1.0000            | 0.933             | 0.797             | 0.680             | 0.602             |  |
|                                                                                                                              | 0.6                     | $\pm 1.29$ | 3.5820            | 1.0000            | 0.929             | 0.788             | 0.673             | 0.600             |  |
|                                                                                                                              | 0.8                     | $\pm 1.12$ | 3.2361            | 1.0000            | 0.926             | 0.781             | 0.668             | 0.600             |  |
|                                                                                                                              | 1.0                     | 1.0        | 3.0000            | 1.0000            | 0.923             | 0.775             | 0.665             | 0.601             |  |

Table 6 Maximum stress at the central notch in a semi-infinite plate containing a row of circular-arc notches shown in Fig. 1(b) [ $N$ : Number of notch,  $S_{\max} = \max(S_j)_{\max}$ ,  $p = 2c$ ,  $c = \sqrt{2tp - t^2}$ ]

| $N$      | $t/\rho$ | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    |
|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3        |          | 1.4388 | 1.6120 | 1.7250 | 1.8262 | 1.9128 |
| 5        |          | 1.4102 | 1.5612 | 1.6574 | 1.7389 | 1.8076 |
| 7        |          | 1.3960 | 1.5372 | 1.6256 | 1.6994 | 1.7603 |
| 9        |          | 1.3878 | 1.5239 | 1.6080 | 1.6772 | 1.7336 |
| 11       |          | 1.3826 | 1.5154 | 1.5966 | 1.6627 | 1.7168 |
| 13       |          | 1.3790 | 1.5095 | 1.5885 | 1.6531 | 1.7046 |
| 15       |          | 1.3763 | 1.5051 | 1.5823 | 1.6454 | 1.6955 |
| $\infty$ |          | 1.359  | 1.477  | 1.542  | 1.595  | 1.636  |



## 4. 結 言

本研究では体積力法の特異積分方程式を利用して半無限板中の任意個の一系列だ円弧形切欠きの干渉効果を厳密に解析した。得られた結果を表3~6にまとめたほか以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析にはさきに提案した8種類の内4種類の基本密度関数を使用した。そして未知関数である体積力密度をこれらと多項式の積で近似する方法により、切欠境界上の応力に関する高い境界条件の満足度が少ない計算時間で得られた。

(2) 切欠列の応力集中問題では、最も外側の切欠きで最大応力が生じ、それ以外の切欠きでは干渉効果が大きく、各切欠間の最大応力はあまり変化がない。

(3) 半無限板の切欠列の場合にも無限板のだ円孔列の場合と同様に最大応力と切欠個数の逆数間に直線関係がほぼ成り立つ。さらに、切欠きが接するほど近づくときには、最大応力と切欠間隔の逆数間にも直線関係がほぼ成り立つことが認められた。これを利用して、外挿によって切欠きが接する場合の最大応力の極限値を求め、材料の表面粗さの疲労強度への影響を応力集中係数で評価する立場において参考となる資料を

得た。

## 文 献

- (1) 例えば, Howland, R. C. J., Stresses in a Plate Containing an Infinite Row of Holes, *Proc. R. Soc. Lond., A*, **148** (1935), 471-491.
- (2) 石田誠・井川秀信, 任意個の一系列だ円孔群・き裂群を持つ板の引張り(ある漸近特性と応力の計算式), *機論*, **58**-553, A (1992), 1642-1649.
- (3) Nisitani, H. (Sih G. C. 編), Solutions of notch problems by Body Force Method, *Stress Analysis of Notch Problem*, (1974), 1-68, Leyden.
- (4) 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第1報, 基礎の理論と境界条件の満足度の検討), *機論*, **58**-555, A (1992), 2179-2184.
- (5) 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法), *機論*, **59**-559, A (1993), 785-791.
- (6) 西谷弘信・陳玳珩, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (7) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, *機誌*, **70**-580 (1967), 627-632.
- (8) 野田尚昭・松尾忠利・石井秀雄, 任意個の一系列だ円形介在物をもつ板の引張り, *機論*, **61**-581, A (1995), 106-113.
- (9) 村上敬宜・堤一也・藤島正博, 疲労強度におよぼす表面粗さの影響の定量的評価, *機論*, **62**-597, A (1996), 1124-1131.
- (10) 野田尚昭・鶴元樹・小田和広, 特異積分方程式による2個および多数個の斜め縁き裂の干渉効果の解析, *機論*, **62**-598, A (1996), 1361-1367.